Rezumat asupra tezi de doctorat
Clase de sisteme deductive in BCK- algebre

Laura Mihaela Dobre

1 Introducere

Scopul acestei teze este de a prezenta noi rezultate în domeniul laticelor reziduate, în special prin introducerea şi studierea noţiunea de *noetherian* şi *artinian*, precum şi studierea mai multor clase de latici reziduate. Teza de faţă se încadrează în algebra logicii. Rezultatele pe care le prezentăm în această teză sunt din următoarele lucrări originale aparţinând autorului acestei teze: [19], [20] şi [52]. În acestă introducere, discutăm despre motivaţia pentru studierea acestor subiecte, şi oferă o imagine de ansamblu asupra capitolelor următoare. Teoria laticilor reziduate a fost utilizată pentru a dezvolta logica algebrei fuzzy ([58]) şi logica substructurală ([51]).

Fie o latice reziduata ([30],[66]) este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ astfel încât $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită, $(L, \odot, 1)$ este monoid comutativ pentru orice $x, y, z \in L$,

$$x \leq y \rightarrow z \text{ iff } x \odot y \leq z.$$

Pentru a simplifica notaţia, o latice reziduată $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ va fi trimis de către mulţimea suport L, aşa cum va fi cazul pentru orice structură algebrică. Cu $B(L)$ vom denumi mulţimea L tuturor elementelor. În 2000, R. Cignoli şi colab. ([23]) a dovedit acest lucru Logica lui H *acutea*jek este logica normelor continue de P. H*á*jek. Un studiu recent privind BL-algebre a fost realizat în 2012, de S. Motamed şi J. Maghaderi ([46]), ei introduc noţiunile de *noetherian* şi *artinian* BL-algebre. Au obţinut ceva definiţii echivalente ale algebrelor BL şi artiniene, noetherian, a dovedit teorile lui Anderson şi Cohen despre teoria ([37]) în BL-algebre. Ei au propus o problemă deschisă BL algebre noetherian (artinian) şi structura algebrică BL-algebre. După aceea, în 2013, O. Zahiri ([67]) a rezolvat problema deschisă a apărut în S. Motamed şi J. Maghaderi ([46]) despre relaţia dintre algebrele BL noetherian (artinian) au fost făcute îmbunătăţiri. Am observat că teoria algebrelelor noetherian (artinian) în cazul general a fost studiată în 1983, de către C. Năstăsescu ([50]). Unul dintre obiectivele noastre în această teză este să studieze algebrele noetheriene şi artiniene în cazul general al reziduatelor.

Teza este compusă din cinci capitole şi este structurată: În capitolul 2 amintim definiţiile de bază şi le punem în exemple de latici reziduate, reguli de calcul de care avem nevoie în restul tezei şi diagrama de clasificare a laticilor reziduate.
De asemenea, prezentăm un studiu privind filtrele (i-filter) în laticele reziduate. Prezentăm câteva exemple. Studiul nostru asupra proprietăţilor filtrelor în laticele reziduate. Suntem interesaţi de filtru (i-filtru) generat finit şi de investigaţi în ce condiţii mulţimea $Min_L(F)$ din toate filtrele minime prime i-aparinând i-filtrului F

din L este o mulţime finită (vezi Teorema 2.5).
Teorema 2.5 Dacă $F \in \mathcal{F}_i(L)$ este un filtru proriu. Dacă orice element $Min_L(F)$ este finit atunci $Min_L(F)$ este o mulţime finită. Vom studia existenţa filtrului în produsul direct $L \times L^{'}$ (vezi Teorema 2.6).

Teorema 2.6 Dacă $L, L^{'}$ este o latice reziduată. Atunci K este un filtru $L \times L^{'}$ dacă şi numai dacă există $F \in \mathcal{F}_i(L)$ şi $G \in \mathcal{F}_i(L^{'})$ astfel încât $K = F \times G$.

În capitolul 3, teoria filtrelor algebrelor logice joacă un rol important studiind aceste algebre. Din punct de vedere logic, diferite tipuri de filtre corespund diferitelor mulţimi de probabile formule. Uneori, este şi un filtru numit sistem deductiv ([48]). În prezent, teoria filtrului au fost studiate şi au fost obţinute câteva rezultate importante ([8], [9], [61], [68], [69]). În [8] am propus o nouă abordare pentru studiul filtrelor laticelor reziduate.

În acest capitol lucrăm pe cazul general al laticelor reziduale şi am stabilit unele relaţii între filtrele regulare şi celelalte filtre: Filtre booleene, filtre MV, filtre Stonean, filtre divizibile şi unele exemple arată că aceste filtre sunt diferite. De asemenea, demonstrăm că o latice reziduată L este o latice Stonean reziduată dacă şi numai dacă fiecare filtru de L este un filtru Stonean şi vom arăta că laticea reziduata L are condiţia Double Negation dacă şi numai dacă fiecare filtru este un filtru regular.

În capitolul 4 am studiat noţiunea de noetherian şi de artianian în cazul general al laticelor reziduate. De asemenea vom studia noetherian şi artinian în cazul laticei modulare (teorema 4.2; remarca 4.1; remarca 4.2).

Teorema 4.2 Spunem că A este o latice modulară mărginită. Atunci A este noetherian şi artinian latice dacă A este structură ordonată.

Remarca 4.1 Dacă A este o latice modular şi $a \in A$, atunci A este noetherian (artinian) dacă laticea $(a]$ şi $[a)$ este noetherian (artinian).

Unele rezultate sunt transferate laticelor reziduate ca structură ordonată (vezi corolarul 4.2)

Corolarul 4.2 Dacă L este latice reziduată, atunci L este noetherian şi artinian latice reziduată dacă este latice $(F(L), \subseteq)$ atunci este structură algebrică $\{1\} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F_n = L$.

După modelul ([50]), ([37]) şi ([46],[67]) am introdus noţiunea noetherian şi artinian în cazul general al laticelor reziduate.

Definiţia 4.4 Fie laticea reziduată L spunem noetherian (artinian) dacă mulţimea $(\mathcal{F}_i(L), \subseteq)$ este noetherian (artinian).

Prezentăm câteva definiţii echivalente ale noetherian şi arteniene laticelor reziduate şi s-au dovedit a fi şi Anderson şi *Cohen* teoreme ale teoriei n laticile reziduate (vezi Teorema 4.7).

Teorema 4.7 L latice reziduaua este noetherian dacă şi numai dacă filtru prim L este finit.

De asemenea, după ce definim noţiunea de structură ordonată laticilor reziduate (a se vedea definiia 2.10) $L \xrightarrow{f} L^{'} \xrightarrow{g} L^{''}$ cu proprietatea respectivă $Ker(g) \subseteq Im(f)$, rezolvăm în cazul general al laticei reziduate o problemă deschisă despre relaţia dintre noetherian (artiniene) latici reziduate în structuri ordonate (a se vedea teorema 4.13), care a fost iniţial propusă pentru cazul BL-algebre în [46].

Teorema 4.13 Dacă $L \xrightarrow{f} L^{'} \xrightarrow{g} L^{''}$ este o structură ordonată laticei reziduate astfel încât f este unul câte unul pe g. Atunci $L^{'}$ este noetherian (artinian) laticei reziduate dacă L şi $L^{''}$ este noetherian (artinian) laticei reziduate.

În final am studiat produsul direct al laticelor reziduate (teorema 4.12).

Teorema 4.12 Dacă L_1 şi L_2 sunt latici reziduate, Atunci L_1 şi L_2 noetherian (artinian) laticelor reziduate dacă $L_1 \times L_2$ este noetherian (artinian) laticelor reziduate.

În capitolul 5 , reticulaţia a fost definită pentru comutativ Simmons în [56] şi este extinsă pe non-comutativ Belluce în [3]. Reticulaţia R este o latice distributivă delimitată $L(R)$ astfel că spectrul principal al lui R, topologia Zariski, este homeomorfism la spectrul prime de $L(R)$, cu Stone topologic. Prin aceaste conexiuni multe proprietăţi pot fi transferate de la R la $L(R)$ şi invers. Prin urmare, o problemă este definirea unei reticulaţi pentru alte clase de algebră universală.

Acest lucru a fost obţinut în [2] de Belluce pentru MV -algebra, George Georgescu în [31] (care constituie o abstracie bună a reţelei de congruente pentru multe tipuri de structuri algebrice), Leuştean pentru BL -algebra în [44], Mureşan pentru latici reziduate în [47], [48] Buşneag şi Piciu [13] pentru Hilbert algebre. Deci, în general, reticulaţia pentru o algebră A menţionată mai sus este o pereche de (L_A, λ) constând o structura distributivă L_A şi o surjecţie $\lambda : A \to L_A$ astfel ncât funcţia dată de imaginea inversă a λ induce (prin reticulaţie) un homeomorfism al spaţiilor topologice între prim spectrul de L_A şi cel de A. Această construcţie permite multor proprietăţile care trebuie transferate între L_A şi A.

Folosind modelul structurilor de mai sus, în această lucrare vom defini reticulaţia unei BCK algebre şi dovedirea mai multor proprietăţi ale acesteia.

Capitolul este împărţit în şapte secţiuni. În primele trei secţiuni ne amintim toate notele preliminare i rezultatele referitoare la algebrele BCK i relevante pentru lucrare. În secţiunea 4 pentru orice BCK algebra, $\tau_A = \{D(X) : X \subseteq A\}$ este spaţiu topologic $Spec(A)$, avem $\{D(a) : a \in A\}$. Topologia τ_A spune Zariski $Spec(A)$ topologic şi spaţiu topologic $(Spec(A), \tau_A)$ spunem spectrum prim A. Fie A o BCK algebră şi pentru $a \in A$ este definită $D_{Max(A)}(a) = D(A) \cap Max(A) = \{M \in Max(A) : a \notin M\}$.

Avem două rezultate:

1. Dacă A este o algebră mărginită BCK. pentru orice $a \in A, D_{Max(A)}(a)$ este o mulţime compactă $Max(A)$ (Proposition 5.7).

2. Dacă A este o algebră mărginită BCK, $Max(A)$ este spaţiul topologic compact Hausdorff (Theorem 5.10). În secţiunea 5 am definit o noua latice distributivă mărginită L_A unde spunem că A este o laticea Belluce asociată unei BCK algebre.

Principalele rezultate sunt: Dacă A este BCK algebra mărginită, $u_A : Max(A) \to Max(L_A)$ este homeomorfism spaţiului topologic $Max(A)$ şi $Max(L_A)$ (teorema 5.11).

În secţiunea 6 am definit noţiunea reticulaţiei BCK algebrei mărginite A (definitia 5.9) şi demonstrăm unicitatea reticulaţiei (teorema 5.12).

În secţiunea 7 am definit noţiunea BCK algebre normale (utizând modelul laticei) şi demonstrăm că A este o BCK algebra normală mărginită, atunci L_A este latice normală (Corolar 5.1)

2 Preliminarii

În acest capitol vom prezenta definiţiile de bază şi proprietăţi ale laticelor reziduate comutative şi am pus în evidenţă multe reguli de calcul într-o latice reziduată de care avem nevoie în restul tezei. Majoritatea rezultatelor din acest capitol sunt cunoscute din anterioarele lucrări; cu toate acestea, rezultatele sunt originale, cu excepţia cazurilor menţionate; natura lor de bază sau simplitatea lor în unele cazuri le-a făcut introductiv pentru prezentare în acest sens capitol. Un alt subiect studiat este teoria filtrului laticelor reziduate. Menţionăm câteva exemple. Investigăm condiţiile $Min_L(F)$ din toate filtrele minime prim care aparin filtrului F din L este o mulţime finită (vezi Teorema 2.5). De asemenea, investigăm existenţa unui filtru în produsul direct $L \times L^{'}$ (vezi Teorema 2.6). În cele din urmă, ne amintim câteva noţiuni despre morfismele laticelor reziduate şi introducem noţiunea de structură ordonata pentru latici reziduate (definiţia 2.10).

3 Note despre filtrele regulate în latici reziduate

Din literatura matematică vom studia mai multe tipuri de filtre în laticea reziduata. În [8] am propus o noua abordare pentru studierea acestor filtre. În acest capitol, ne inspirăm din [8], stabilim câteva conexiuni între filtrele regulate şi anumite tipuri de filtre în cazul laticelor reziduate. Demonstrăm că o latice reziduată este o latice reziduată Stonean dacă şi numai dacă fiecare filtru este filtru Stonean şi arătăm că laticea reziduată este dublă negaţie cu condiţia ca orice filtru este filtru regular.

4 Noetherian şi artinian în cazul general al laticelor reziduate

În acest capitol vom introduce noţiunea în cazul general al laticelor reziduate *noetherian* şi *artinian* laticea reziduată cu proprietatea ca fiecare crescând (în scădere) filtru este fix (see Definiţia 4.4). În exemplul 8, (ii) vom prezenta laticea reziduată care nu este noetherian, prin urmare vom studia noetherian laticei reziduate este adevărat. Sunt obţinute mai multe rezultate. Vom menţiona câteva exemple. Obţinem câteva definiţii echivalente noetherian şi artinian laticelor reziduate (vezi teoremele 4.3 şi 4.5). Studiem coeficientul laticei reziduate din noetherian (artinian) laticei reziduate (vezi remarca 4.3) şi demonstrăm teorema Anderson şi Cohen din teoria ([37]) în laticea reziduată (teorema 4.7). După vom introduce noţiunea weak short exact sequence pentru laticea reziduată (teorema 2.10) rezolvăm în cazul general laticelor reziduate despre relaţia între noetherian (artinian) al laticelor reziduate (teorema 4.13).

5 Laticea Belluce asociată unei BCK algebre

Acest capitol este structurat în cinci secţiuni după cum urmează: conţine câteva definiţii de bază şi rezultate referitoare la BCK algebre. Primul conţine definiţii şi proprietăţi ale sistemelor deductive, sistemelor deductive prime şi maximale. Pentru orice BCK algebre A, spaţiile topologice Spec (A) şi Max (A) sunt studiate în secţiunea 2. Secţiunea 3 conţine anumite rezultate originale legate de laticea Belluce asociată unei BCK algebre. În secţiunea 4 definim noţiunea de reticulaţie a unei BCK algebra marginită A. În secţiunea 5 definim noţiunea unei BCK algebrelor normale.

References

[1] R. Balbes, Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974.

[2] L. P. Belluce, *Semisimple algebras of infinite valued logic and bold fuzzy set theory*, Canadian Journal of Mathematics, Vol. XXXVIII, No. 6 (1986), 1356-1379.

[3] Belluce, L. P., *Spectral spaces and non-commutative rings,* Comm. Algebra, vol. 19, (1991), 1855-1865.

[4] L. P. Beluce, A. Di Nola, A. Lettieri, *Local MV-algebras*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, serie II, Vol. 42 (1993), 247-361.

[5] T. S. Blyth, M. F. Janovitz, *Residuation Theory*, Pergamon Press, 1972.

[6] T. S. Blyth, *Lattices and ordered algebraic structures*, Springer, Berlin, 2005.

[7] D. Buşneag, *Categories of Algebraic Logic*, Editura Academiei Române, Bucharest, 2006.

[8] D. Buşneag and D. Piciu, A new approach for classification of filters in residuated lattices, *Fuzzy Sets and Systems* **260** (2015), 121-130.

[9] D. Buşneag and D. Piciu, Semi-G-filters, Stonean filters, MTL-filters, divisible filters, BL-filters and regular filters in residuated lattices, *Iranian Journal of Fuzzy Systems* **13**(1) (2016),145-160.

[10] D. Buşneag, D. Piciu, *Residuated lattice of fractions relative to a* $\wedge-$*closed system*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, Tome 49 (97), No. 1 (2006), 13-27.

[11] D. Buşneag, S. Rudeanu, *A glimpse of deductive systems in algebra*, Central European Journal of Mathematics, No. 8 (4) (2010), 688-705.

[12] D. Buşneag, D. Piciu, A. Jeflea, *Archimedean Residuated Lattices*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics, Vol. LVI, (2010), 227-252.

[13] Buşneag, D., Piciu, D., *The Belluce lattice associated with a bounded Hilbert algebra*, Soft Computing, 19 (2015), 3031-3042.

[14] D. Buşneag, D. Piciu and J. Paralescu, *Divisible and semi-divisible residuated lattices*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematica, Tom LXI (2015), 287-318.

[15] C. Buşneag, D. Piciu, *The stable topologies for residuated lattices*, Soft Computing, 16 (2012), 1639-1655.

[16] C. Buşneag, *States and topologies on residuated lattices*, Ph.D. Thesis, University of Craiova, 2011.

[17] D. Buşneag, D. Piciu, *Some types of filters in residuated lattices*, Soft Computing, WP. 18, Issue 5(2014),825-837.

[18] D. Buşneag, D. Piciu, L.-C. Holdon, *Some properties of ideals in Stonean residuated lattices*, Journal of Multiple Valued Logic & Soft Computing, vol 24 (2015), 529-546.

[19] D. Buşneag, D. Piciu, **L. M. Dobre**, The Belluce- lattice associated with a bounded BCK algebras, (submitted Iranian Journal of Fuzzy Systems).

[20] D. Buşneag, D. Piciu, L.C. Holdon **L.M. Dobre**, *Noetherian and artinian algebras in the general case of residuated lattices*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (accepted).

[21] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 78, New York - Heidelberg Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[22] Celani, S.A., *Deductive systems of BCK algebras,* Acta Univ. Palackianae Olomoucensis, Facultas Rervoum Naturalium Mathematisa 43(1) (2004), 27-32.

[23] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo, A. Torrens, *Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norm and their residua*, Soft Computing, Vol. 4 (2000), 106-112.

[24] W. H. Cornish, *Normal Lattices*, Journal of Australian Mathematical Society, Vol. 14, issue 02 (1972), 200-215.

[25] Daowu Pei, *Fuzzy Logic Algebras on Residuated Lattices*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Vol. 28 (2004), 519-531.

[26] F. Esteva, L. Godo, *Monoidal* $t-$*norm based logic: towards a logic for left-continnuos* $t-$*norms*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 124, No. 3 (2001), 271-288.

[27] A. Filipoiu, G. Georgescu, A. Lettieri, *Maximal MV-algebras*, Mathware Soft-Computing, Vol. 4, No. 1 (1997), 53-62.

[28] P. Flondor, G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-t-norms and pseudo-BL algebras*, Soft Computing, Vol. 5, No. 5 (2001), 355-371.

[29] H. Freytes, *Injectives in residuated algebras*, Algebra Universalis, Vol. 51, No. 4 (2004), 373-393.

[30] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono, *Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*, Studies in Logics and the Foundations of Mathematics, Elsevier, 2007.

[31] Georgescu, G., *The reticulation of a quantale*, Rev. Roum. Pures Appl, nr. 7-8, (1995), 619-631.

[32] Ghiţă , M., Contributions to the study of the category of Hilbert algebras, Ph. D. Thesis, University of Craiova, 2011.

[33] Gispert, A, Torrens, A., Boolean representation of bounded BCK-algebras, Soft Comput., vol. 12(2008), 941-954.

[34] Gispert , A, Torrens, A., Bounded BCK- algebras and their generated variety, Math. Logic Quarterly, 53 (2007), 206-213.

[35] P. Hájek, *Mathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[36] L. C. Holdon *Classes of residuated lattices*, Ph. D. Thesis, University of Craiova, 2014.

[37] T.W. Hungerford, *Algebra*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.

[38] P. M. Idziak, *Lattice operations in BCK-algebras*, Mathematica Japonica, 29 (1984), 839-846.

[39] A. Iorgulescu, *Algebras of logic as BCK algebras*, Academy of Economic Studies Bucharest, 2008.

[40] M. Kondo, *Simple characterization of strict residuated lattices with an involutive negation*, Soft Computing, Vol. 17 (2013), 39-44.

[41] Kűhr, J., *Pseudo BCK algebras and related structures*, Univ. Palackeho v Olomouci, 2007.

[42] L. Leuştean, G. Georgescu, C. Mureşan, *Maximal residuated lattices with lifting Boolean center*, Algebra Universalis, Vol. 63, No. 1 (2008), 83-99.

[43] L. Leuştean, *Representation of many-valued algebras*, Ph.D. Thesis, University of Bucharest, 2003.

[44] Leuştean, L., *The prime and maximal spectra and the reticulation of BL-algebras*, Central European Journal of Mathematics, No. 3 (2003), 382-397.

[45] N. Mohtashamnia, Arsham Borumand Saeid, *A special type of BL-algebra*, Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series, Vol. 39 (2012), 8-20.

[46] S. Motamed, J. Moghaderi, *Noetherian and Artinian BL-algebras*, Soft Computing, Vol. 16, No. 11 (2012), 1989-1994.

[47] C. Mureşan, *The Reticulation of a Residuated Lattice*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, Tome 51 (99), No. 1 (2008), 47-65.

[48] Mureşan, C., *Characterisation of the reticulation of a residuated lattice*, J. of Mult.-Valued Logic& Soft Computing, Vol. 16 (2010), 427-447.

[49] C. Mureşan, *Co-Stone Residuated Lattices*, Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series, Vol. 40 (2013), 52-75.

[50] C. Năstăsescu, *Teoria dimensiunii in algebra necomutativă*, Editura Academiei Române, Bucharest, 1983.

[51] H. Ono, *Substructural logics and residuated lattices - an introduction*, 50 Years of Studia Logica, Trends in Logic, Kluwer Academic Publishers 21 (2003), 193-228.

[52] D. Piciu, **L.M. Dobre**, Note on the regular filter in residuated lattices, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. Vol.44(2), 2017, 283-294.

[53] D. Piciu, *Algebras of Fuzzy Logic*, Editura Universitaria Craiova, Craiova (2007).

[54] E. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, American Journal of Mathematics, Vol. 43 (1921) 163-185.

[55] J. Rachůnek, *A non-commutative generalization of MV-algebras*, Czechoslovak Journal of Mathematics, Vol. 52 (2002), 255-273.

[56] Simmons, H., *Reticulated rings*, J. of Algebra 66 (1980), 169-192.

[57] M. H. Stone, *Topological representations of distributive lattices and Browerian logics*, Casopispest. Math. 67 (1937), 1-25.

[58] E. Turunen, *Mathematics Behind Fuzzy logic*, Physica-Verlag, New York 1999.

[59] E. Turunen, *Local BL-algebras*, Multiple-Valued Logic, Vol. 6, No. 1-2 (2001), 229-249.

[60] E. Turunen, J. Mertanen, *States on semi-divisible residuated lattices*, Soft Computing, Vol. 12 (2008), 353-357.

[61] B. Van Gasse, G. Deschrijver, C. Cornelis and E. Kerre, Filters of residuated lattices and triangle algebras, *Information Sciences* **180** (16) (2010), 3006-3020.

[62] J. Varlet, *On the characterization of Stone lattices*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), Vol. 27 (1966), 81-84.

[63] Y. Xu, D. Ruan, K. Y. Qin, J. Liu, *Lattice-Valued Logic*, Springer, Berlin, 2003.

[64] Wallman, H., *Lattices and topological spaces*, Amer. Math. (2), vol.39 (1938), 112-126.

[65] M. Ward, *Residuated distributive lattices*, Duke Mathematical Journal, Vol. 6, No. 3 (1940), 641-651.

[66] M. Ward, R. P. Dilworth, *Residuated lattices*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 45 (1939), 335-354.

[67] O. Zahiri, *Chain conditions on BL-algebras*, Soft Computing, 18 (2014), 419-426.

[68] M. Zhenming, MTL-filters and their characterizations in residuated lattices, *Computer Engineering and Applications* **48** (20) (2012), 64-66.

[69] Y. Zhu, Y. Xu, *On filter theory of residuated lattices*, Information Science, Vol. 180 (2010), 3614-3632.